OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA
Predavanje III

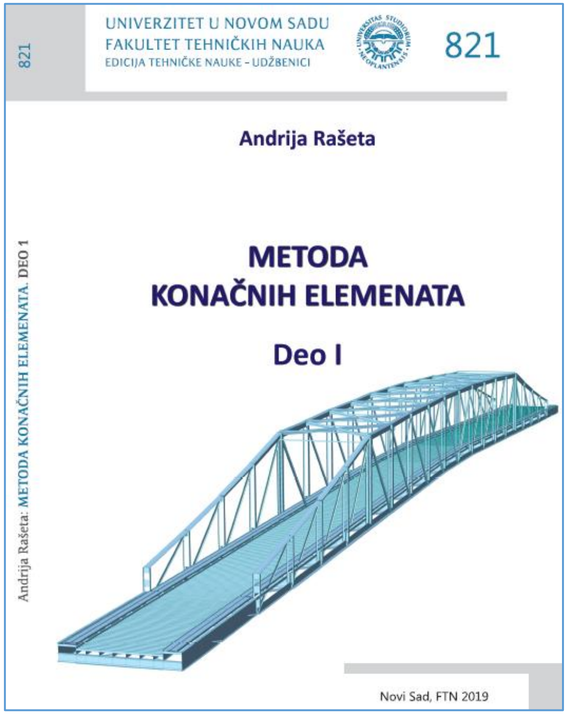
Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Departman za građevinarstvo i geodeziju
Katedra za konstrukcije
Prof. dr Andrija Rašeta
Kabinet LG209
email: araseta@uns.ac.rs i araseta@gmail.com

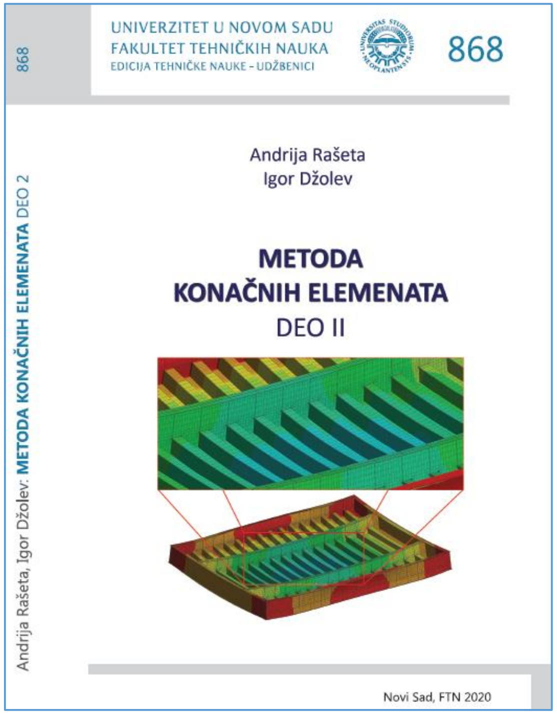
OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA
Predavanje III

Ravansko stanje napona
Ravansko stanje deformacije
Trougaoni (CST) KE
Pravougaoni KE sa 4. i 9. čvorova
Interpolacione funkcije. Lagranžovi polinom
Linearna statička analiza

Literatura

- **Metoda konačnih elemenata, deo I**, A. Rašeta, FTN Novi Sad, 2019.
- **Metoda konačnih elemenata, deo II**, A. Rašeta, I. Džolev, FTN Novi Sad, 2020.





2D KE. Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Ravansko stanje napona

- Kada vektori napona za sve presečne ravni u nekoj tački tela pripadaju jednoj ravni onda je stanje napona u toj tački ravansko, odnosno može da se kaže da su vektori napona u toj tački komplanarni
- Vektor spoljašnjih sila

$$\mathbf{q}^T = \{q_x \quad q_y\} \qquad \mathbf{q}^T = \{q_x \neq 0 \quad q_y \neq 0 \quad q_z = 0\}$$

- Vektor pomeranja ($w \neq 0$)

$$\mathbf{u}^T = \{u \quad v\} \qquad \mathbf{u}^T = \{u \neq 0 \quad v \neq 0 \quad w \neq 0\}$$

- Komponente napona

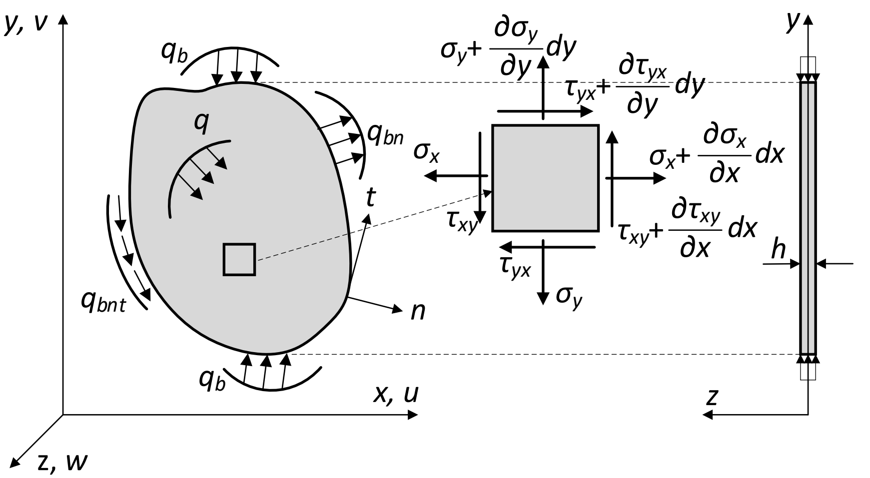
$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_y \neq 0 \quad \sigma_z = 0 \quad \tau_{xy} \neq 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad \tau_{zx} = 0\}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}$$

- Komponente deformacije

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_x \neq 0 \quad \varepsilon_y \neq 0 \quad \varepsilon_z \neq 0 \quad \gamma_{xy} \neq 0 \quad \gamma_{yz} = 0 \quad \gamma_{zx} = 0\}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}$$



2D KE. Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Ravansko stanje napona

- **Uslovi ravnoteže**
  - Izraženi preko komponenata napona i preko unutrašnjih sila

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}$$

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{q}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{N_x \quad N_y \quad N_{xy}\}$$

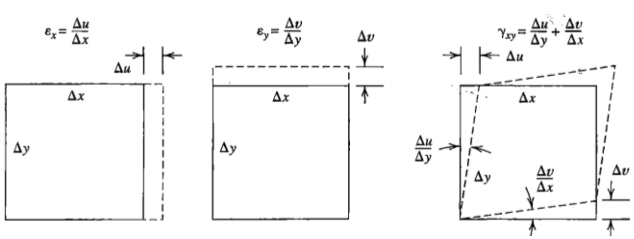
$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{q}$$

$$N_{yx} = N_{xy}$$

- **Veze između deformacije i pomeranja**

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \partial/\partial_x & 0 \\ 0 & \partial/\partial_y \\ \partial/\partial_y & \partial/\partial_x \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u} \qquad \left(\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$



Deformacije elementarnog kvadrata dxdy u ravni i odgovarajuće dilatacije i klizanje (Δx→0 i Δy→0)

Veze između napona i deformacije

Konstitutivne jednačine izražene pomoću Hukovog zakona

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{0t}) \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{0t} = \alpha_t t\{1 \quad 1 \quad 0\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E\alpha_t t}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_{0t} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \alpha_t t \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[-\nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha_t t = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t t\right)$$

2D KE. Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Ravansko stanje napona

- **Prirodni granični uslovi**
  - Na ivici gde su zadati prirodni granični uslovi (po silama) q_{bn} i q_{bnt}

    $$\begin{Bmatrix} q_{bn} \\ q_{bnt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_n \\ N_{nt} \end{Bmatrix}$$

    - ako je ivica zida paralelna sa osom y (x=const.) sledi

      $$\mathbf{q}_b = \mathbf{R}_q \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \begin{Bmatrix} q_{bx} \\ q_{bxy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}$$

- **Esencijalni granični uslovi**
  - Na ivici zida su zadati esencijalni granični uslovi (po pomeranjima) u_{bn} i u_{bt}

    $$\begin{Bmatrix} u_{bn} \\ u_{bt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_n \\ u_t \end{Bmatrix}$$

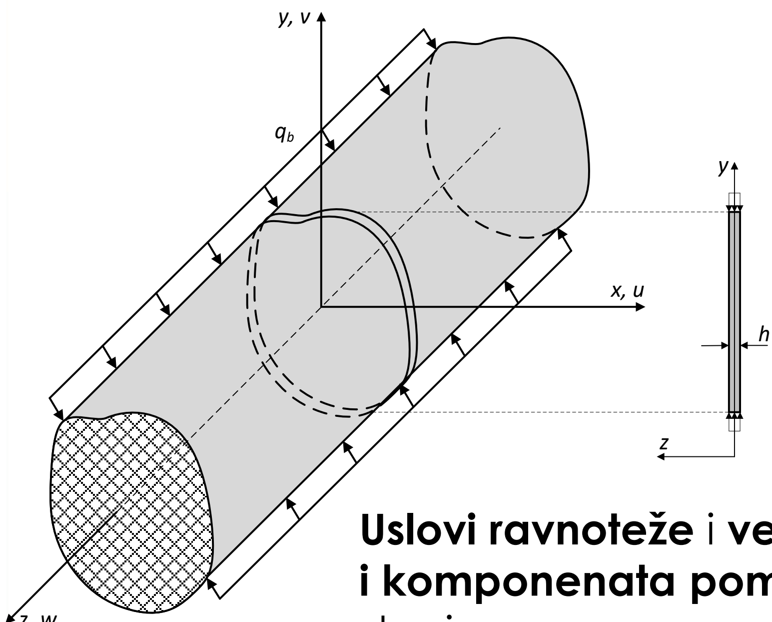
    - ako je ivica zida paralelna sa osom y (x=const.) za zadate komponente pomeranja u_b i v_b u pravcu osa x i y važi

      $$\mathbf{u}_b = \mathbf{R}_u \mathbf{u} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

- **Komentar**
  - S obzirom na to da je komponenta ε_z tenzora deformacije različita od nule, a komponenta σ_z tenzora napona jednaka nuli, pri analizi potencijalne energije deformacije ove veličine se zanemaruju jer je njihov proizvod jednak nuli

2D KE. Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Ravansko stanje deformacije

- U tački tela vlada ravansko stanje deformacije ako sve komponente deformacije leže u jednoj ravni
- Telo se nalazi u ravanskom stanju deformacije ako u svakoj tački vlada ravansko stanje deformacije i ako sve komponente deformacije leže u međusobno paralelnim ravnima



$$\mathbf{u}^T = \{u \neq 0 \quad v \neq 0 \quad w = 0\} \qquad \mathbf{u}^T = \{u \quad v\}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_y \neq 0 \quad \sigma_z \neq 0 \quad \tau_{xy} \neq 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad \tau_{zx} = 0\}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_x \neq 0 \quad \varepsilon_y \neq 0 \quad \varepsilon_z = 0 \quad \gamma_{xy} \neq 0 \quad \gamma_{yz} = 0 \quad \gamma_{zx} = 0\}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}$$

Uslovi ravnoteže i **veze između komponenata deformacije** (ε_x, ε_y i γ_{xy}) **i komponenata pomeranja** (u, v) imaju isti oblik kao i kod ravanskog stanja napona

2D KE. Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti. Ravansko stanje deformacije

- **Veze između napona i deformacije** (konstitutivne jednačine) izražene pomoću Hukovog zakona glase

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{0t}) \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{0t} = \alpha_t t\{1 \quad 1 \quad 0\}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} - \frac{E\alpha_t t}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_{0t} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$$

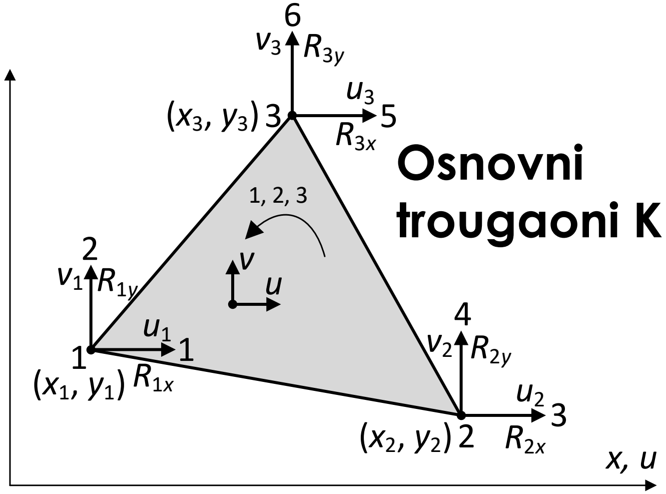
$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E}\begin{bmatrix}1-\nu & -\nu & 0\\ -\nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} + \alpha_t t\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$(\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) - E\alpha_t t)$$

$$\mathbf{C} = \frac{1+\nu}{E}\begin{bmatrix}1-\nu & -\nu & 0\\ -\nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

- **Komentari**
  - S obzirom na to da je komponenta ε_z tenzora deformacije jednaka nuli, a komponenta σ_z tenzora napona različita od nule, pri analizi potencijalne energije deformacije ove veličine se zanemaruju jer je njihov proizvod jednak nuli
  - Jednačine ravnoteže su iste za RSN i RSD pa su naponi σ_x i σ_y za oba slučaja isti
  - Kada je $\nu \neq 0$ pomeranja za slučaj RSD su nešto manja u odnosu na pomeranja za slučaj RSN

2D KE. Trougaoni KE. Linearna interpolacija. CST KE



Osnovni trougaoni KE

- **Osnovne nepoznate**

$$\mathbf{d}^T = \{\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3\}$$

$$\mathbf{d}_i^T = \{u_i \quad v_i\}, \qquad i = 1,2,3$$

- **Direktan postupak za određivanje IF**
  - Raspodela pomeranja u polju KE definisana je potpunim linearnim polinomima

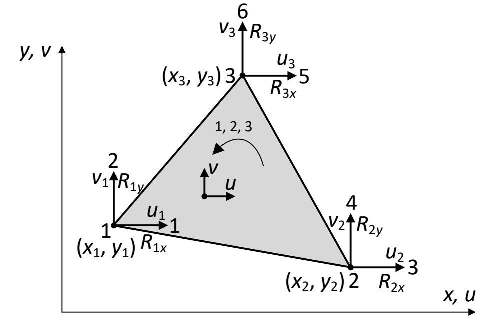
$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \qquad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^T = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6\}$$

2D KE. Trougaoni KE. Linearna interpolacija. CST KE



- **Direktan postupak za određivanje IF**
  - Granični uslovi za čvorove KE

$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \qquad v_1 = \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 y_1$$

$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \qquad v_2 = \alpha_4 + \alpha_5 x_2 + \alpha_6 y_2$$

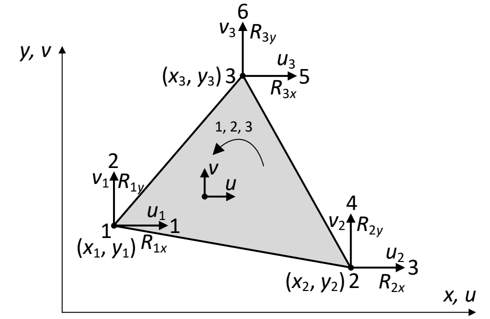
$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \qquad v_3 = \alpha_4 + \alpha_5 x_3 + \alpha_6 y_3$$

  - odnosno vektor pomeranja čvorova KE glasi

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

2D KE. Trougaoni KE. Linearna interpolacija. CST KE



- **Direktan postupak za određivanje IF**
  - Uvodeći površinu trougaonog KE

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$\begin{array}{ccc} a_1 = x_2y_3 - x_3y_2, & a_2 = x_3y_1 - x_1y_3, & a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \\ b_1 = y_2 - y_3, & b_2 = y_3 - y_1, & b_3 = y_1 - y_2 \\ c_1 = x_3 - x_2, & c_2 = x_1 - x_3, & c_3 = x_2 - x_1 \end{array}$$

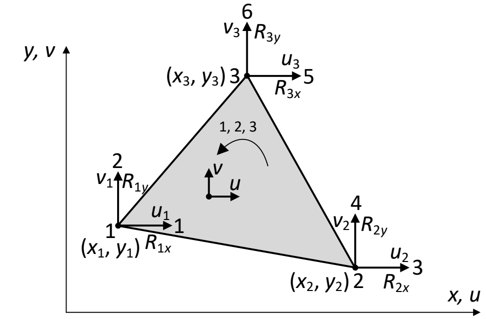
  - sledi

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

  - Matrica IF glasi

$$\mathbf{N} = \mathbf{AC}^{-1} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

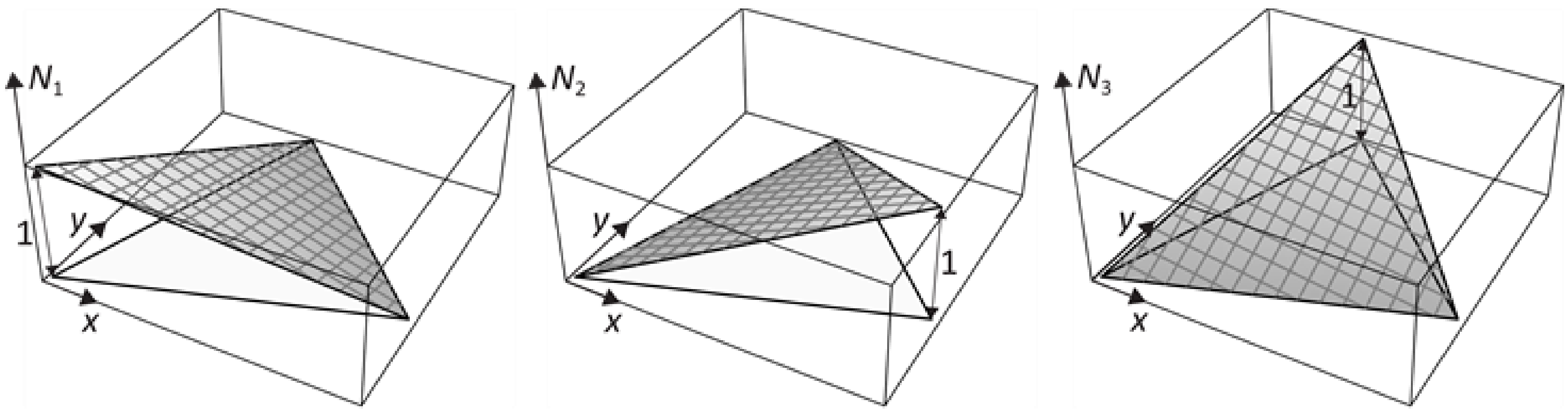
2D KE. Trougaoni KE. Linearna interpolacija. CST KE



- **Direktan postupak za određivanje IF**
  - odnosno IF glase

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y), \qquad i = 1,2,3$$

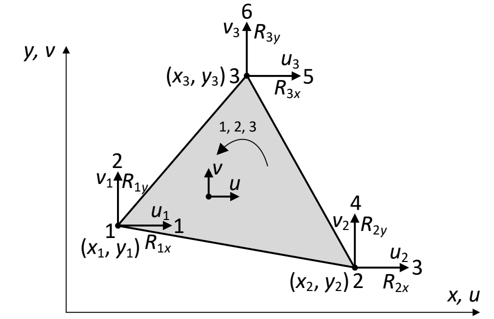
$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2, & a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3, & a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 \\ b_1 &= y_2 - y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & b_3 &= y_1 - y_2 \\ c_1 &= x_3 - x_2, & c_2 &= x_1 - x_3, & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$



- **Raspodela pomeranja u polju KE**

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{u} = \mathbf{Nd} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

2D KE. Trougaoni KE. Linearna interpolacija. CST KE



- **Matrica krutosti**

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dV = \int_A \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}h dA$$

- Raspodela deformacije u polju KE

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \partial/\partial_x & 0 \\ 0 & \partial/\partial_y \\ \partial/\partial_y & \partial/\partial_x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_k\mathbf{N}$$

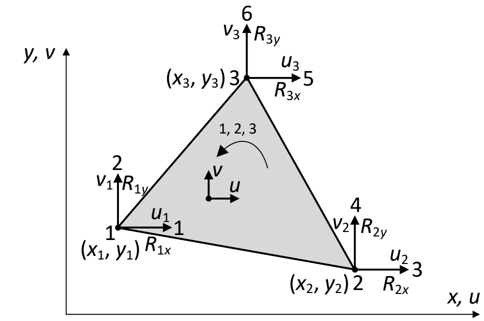
$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

Komentar: isti oblik **B** za ravansko stanje napona i ravansko stanje deformacije

2D KE. Trougaoni KE. Linearna interpolacija. CST KE



- **Matrica krutosti**
  - Ukoliko je debljina h KE konstantna sledi

$$\mathbf{k}=\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}h\int_A dA=\frac{h}{4A}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}\mathbf{D}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & \text{sim.} & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

RSN: $\mathbf{D}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$

RSD: $\mathbf{D}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$

$k_{11}=\frac{h}{4A}\left[b_1^2D_{11}+c_1^2D_{33}\right]$, $\quad k_{12}=k_{21}=\frac{h}{4A}\left[b_1c_1\left(D_{12}+D_{33}\right)\right]$

$k_{13}=k_{31}=\frac{h}{4A}\left[b_1b_2D_{11}+c_1c_2D_{33}\right]$, $\quad k_{14}=k_{41}=\frac{h}{4A}\left[b_1c_2D_{12}+b_2c_1D_{33}\right]$

$k_{15}=k_{51}=\frac{h}{4A}\left[b_1b_3D_{11}+c_1c_3D_{33}\right]$, $\quad k_{16}=k_{61}=\frac{h}{4A}\left[b_1c_3D_{12}+b_3c_1D_{33}\right]$

$k_{22}=\frac{h}{4A}\left[c_1^2D_{22}+b_1^2D_{33}\right]$, $\quad k_{23}=k_{32}=\frac{h}{4A}\left[b_2c_1D_{21}+b_1c_2D_{33}\right]$

$k_{24}=k_{42}=\frac{h}{4A}\left[c_1c_2D_{22}+b_1b_2D_{33}\right]$, $\quad k_{25}=k_{52}=\frac{h}{4A}\left[b_3c_1D_{21}+b_1c_3D_{33}\right]$

$k_{26}=k_{62}=\frac{h}{4A}\left[c_1c_3D_{22}+b_1b_3D_{33}\right]$, $\quad k_{33}=\frac{h}{4A}\left[b_2^2D_{11}+c_2^2D_{33}\right]$

$k_{34}=k_{43}=\frac{h}{4A}\left[b_2c_2\left(D_{12}+D_{33}\right)\right]$, $\quad k_{35}=k_{53}=\frac{h}{4A}\left[b_2b_3D_{11}+c_2c_3D_{33}\right]$

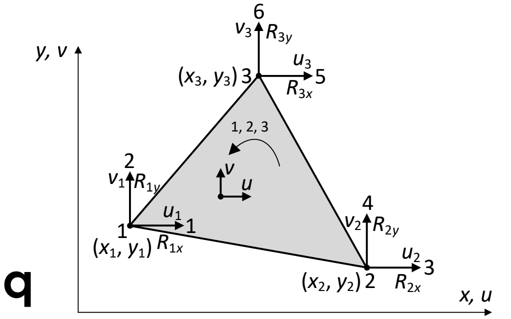
$k_{36}=k_{63}=\frac{h}{4A}\left[b_2c_3D_{12}+b_3c_2D_{33}\right]$, $\quad k_{44}=\frac{h}{4A}\left[c_2^2D_{22}+b_2^2D_{33}\right]$

$k_{45}=k_{54}=\frac{h}{4A}\left[b_3c_2D_{21}+b_2c_3D_{33}\right]$, $\quad k_{46}=k_{64}=\frac{h}{4A}\left[c_2c_3D_{22}+b_2b_3D_{33}\right]$

$k_{55}=\frac{h}{4A}\left[b_3^2D_{11}+c_3^2D_{33}\right]$, $\quad k_{56}=k_{65}=\frac{h}{4A}\left[b_3c_3\left(D_{12}+D_{33}\right)\right]$

$k_{66}=\frac{h}{4A}\left[c_3^2D_{22}+b_3^2D_{33}\right]$

2D KE. Trougaoni KE. Linearna interpolacija. CST KE



- **Vektor ekvivalentnog opterećenja**
  - Ako na KE deluje samo zapreminsko opterećenje **q**

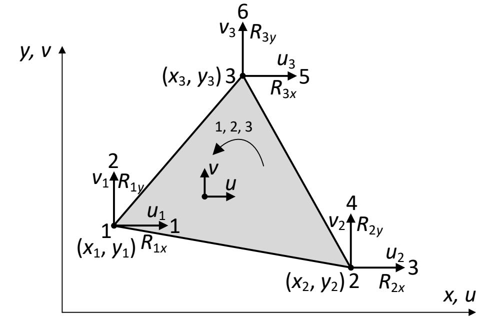
$$\mathbf{Q}=\begin{Bmatrix}\mathbf{Q}_1\\\mathbf{Q}_2\\\mathbf{Q}_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Q_{1x}\\Q_{1y}\\Q_{2x}\\Q_{2y}\\Q_{3x}\\Q_{3y}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\\Q_5\\Q_6\end{Bmatrix}=\int_A \mathbf{N}^T\mathbf{q}h\,dA=\int_A\begin{bmatrix}N_1&0\\0&N_1\\N_2&0\\0&N_2\\N_3&0\\0&N_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_x\\q_y\end{Bmatrix}h\,dA$$

  - Ako su zapreminske sile konstantne, tj. $q_x=q_{x0}=const.$ i $q_y=q_{y0}=const.$, i ako KE ima konstantnu debljinu h, vektor ekvivalentnog opterećenja *i*-tog čvora glasi

$$\mathbf{Q}_i=\begin{Bmatrix}Q_{ix}\\Q_{iy}\end{Bmatrix}=h\begin{Bmatrix}q_{x0}\\q_{y0}\end{Bmatrix}\int_A N_i\,dA=\frac{Ah}{3}\begin{Bmatrix}q_{x0}\\q_{y0}\end{Bmatrix}$$

S obzirom na to da interpolaciona funkcija N_i ima vrednost 1 u čvoru *i*, a u ostalim čvorovima 0, vrednost integrala u izrazu predstavlja zapreminu zamišljenog tetraedra čija je baza površina *A* i visina 1, tj. $V = (1/3)\cdot A\cdot 1$

2D KE. Trougaoni KE. Linearna interpolacija. CST KE



- **Vektor ekvivalentnog opterećenja**
  - Sopstvena težina (*h*=*const.*)

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ q_y \end{Bmatrix} = -\rho g \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_{1x} \\ Q_{1y} \\ Q_{2x} \\ Q_{2y} \\ Q_{3x} \\ Q_{3y} \end{Bmatrix} = -\rho g \frac{Ah}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

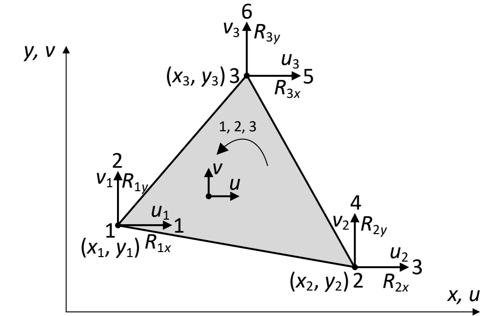
  - Početne deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ (*h*=*const.*)

$$\mathbf{Q} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 h dA = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \int_A h dA = \begin{Bmatrix} Q_{1x} \\ Q_{1y} \\ Q_{2x} \\ Q_{2y} \\ Q_{3x} \\ Q_{3y} \end{Bmatrix} = hA\mathbf{B}^T \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix}$$

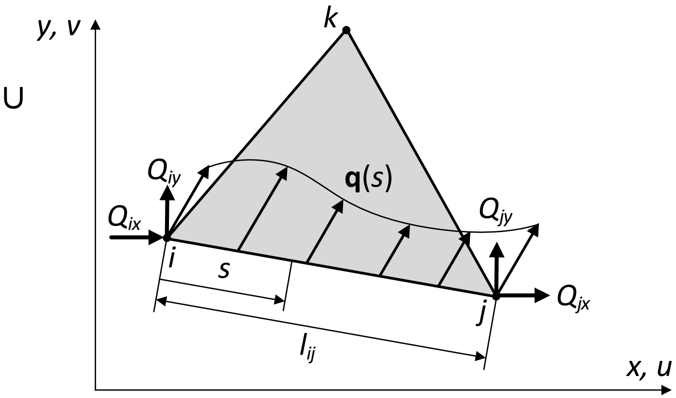
  - Početni naponi $\boldsymbol{\sigma}_0$ (*h*=*const.*)

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_{1x} \\ Q_{1y} \\ Q_{2x} \\ Q_{2y} \\ Q_{3x} \\ Q_{3y} \end{Bmatrix} = -\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV = -hA\mathbf{B}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \tau_{xy0} \end{Bmatrix}$$

2D KE. Trougaoni KE. Linearna interpolacija. CST KE



- **Vektor ekvivalentnog opterećenja**
  - Raspodeljeno opterećenje duž konture
    - Elementarna površina konture na koju deluje opterećenje je $dS = hds$, a opterećenje je u funkciji lokalne koordinate s i u opštem slučaju ima komponente u pravcu Dekartovih koordinatnih osa x i y

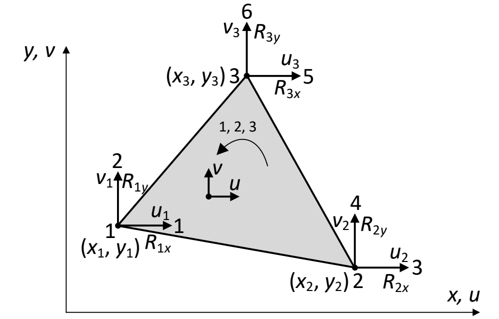


$$\mathbf{q}_b(s) = \begin{Bmatrix} q_{bx}(s) \\ q_{by}(s) \end{Bmatrix}$$

    - Raspodela pomeranja na konturi i-j KE u zavisnosti od pomeranja čvorova na krajevima konture (linearna raspodela pomeranja u polju KE važi i za pomeranja na konturi) data je izrazom

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{N}_s \mathbf{d} = \begin{bmatrix} N_{si} & 0 & N_{sj} & 0 \\ 0 & N_{si} & 0 & N_{sj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

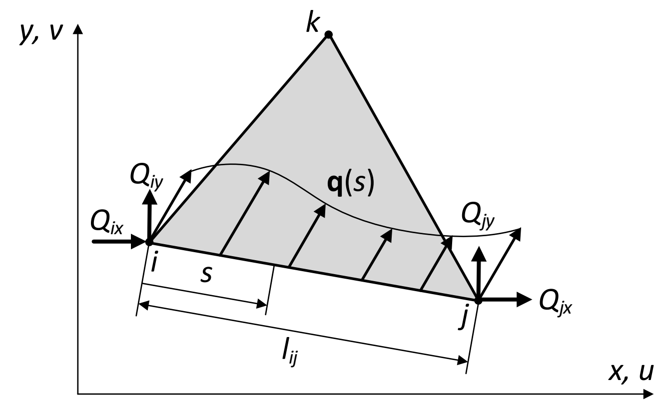
2D KE. Trougaoni KE. Linearna interpolacija. CST KE



- **Vektor ekvivalentnog opterećenja**
  - Raspodeljeno opterećenje duž konture
    - Raspodela pomeranja na konturi *i*-*j* je linearna funkcija koordinate *s*

$$u_s = \alpha_1 + \alpha_2 s \qquad v_s = \alpha_3 + \alpha_4 s$$

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_s \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

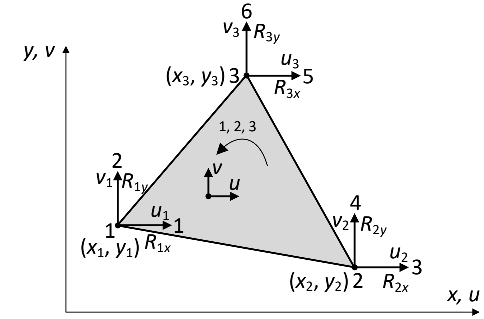


- Za čvorove na krajevima konture

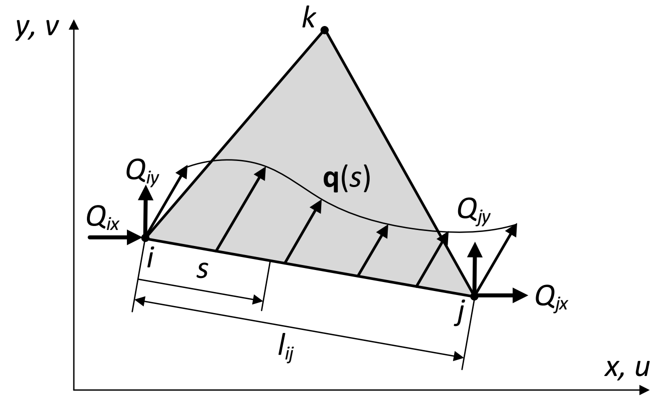
$$u_s(0) = u_i = \alpha_1 \qquad u_s(l_{ij}) = u_j = \alpha_1 + \alpha_2 l_{ij}$$
$$v_s(0) = v_i = \alpha_3 \qquad v_s(l_{ij}) = v_j = \alpha_3 + \alpha_4 l_{ij}$$

$$l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

2D KE. Trougaoni KE. Linearna interpolacija. CST KE



- **Vektor ekvivalentnog opterećenja**
  - Raspodeljeno opterećenje duž konture
    - Vektor pomeranja krajeva konture i-j glasi



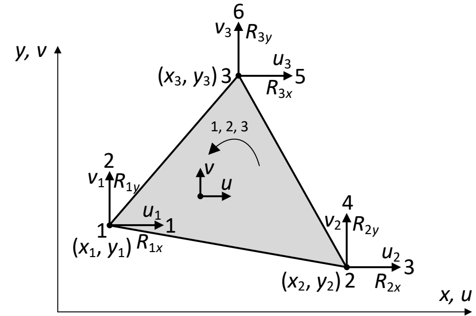
$$\mathbf{d} = \mathbf{C\alpha} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & l_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l_{ij}} & 0 & \frac{1}{l_{ij}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_{ij}} & 0 & \frac{1}{l_{ij}} \end{bmatrix}$$

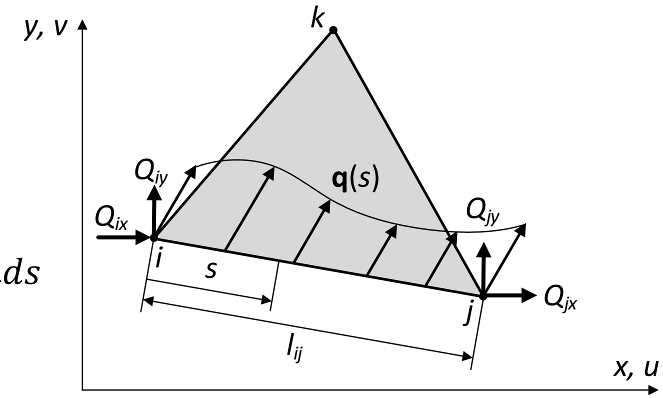
- Matrica IF

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{A\alpha} = \mathbf{AC}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{N}_s\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{N}_s = \mathbf{AC}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{s}{l_{ij}} & 0 & \frac{s}{l_{ij}} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s}{l_{ij}} & 0 & \frac{s}{l_{ij}} \end{bmatrix}$$

2D KE. Trougaoni KE. Linearna interpolacija. CST KE



- **Vektor ekvivalentnog opterećenja**
  - Raspodeljeno opterećenje duž konture
    - Vektor ekvivalentnog opterećenja u čvorovima na kraju konture i-j glasi

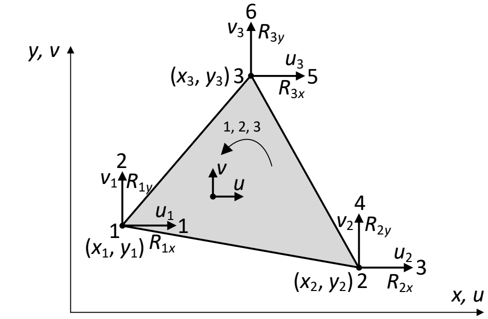


$$\mathbf{Q}=\begin{Bmatrix}\mathbf{Q}_i\\ \mathbf{Q}_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Q_{ix}\\ Q_{iy}\\ Q_{jx}\\ Q_{jy}\end{Bmatrix}=\int_{l_{ij}}\mathbf{N}_s^T\mathbf{q}hds=\int_{l_{ij}}\begin{bmatrix}1-\dfrac{s}{l_{ij}} & 0\\ 0 & 1-\dfrac{s}{l_{ij}}\\ \dfrac{s}{l_{ij}} & 0\\ 0 & \dfrac{s}{l_{ij}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_{bx}(s)\\ q_{by}(s)\end{Bmatrix}hds$$

- Primer. Kontura je opterećena samo jednako podeljenim opterećenjem u pravcu x ose (q_{bx}=q_{bx0}=const.). Vektor ekvivalentnog opterećenja za čvorove na krajevima konture glasi

$$\mathbf{Q}=\begin{Bmatrix}\mathbf{Q}_i\\ \mathbf{Q}_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Q_{ix}\\ Q_{iy}\\ Q_{jx}\\ Q_{jy}\end{Bmatrix}=\int_{l_{ij}}\mathbf{N}_s^T\mathbf{q}hds=\int_{l_{ij}}\begin{bmatrix}1-\dfrac{s}{l_{ij}} & 0\\ 0 & 1-\dfrac{s}{l_{ij}}\\ \dfrac{s}{l_{ij}} & 0\\ 0 & \dfrac{s}{l_{ij}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_{bx0}\\ 0\end{Bmatrix}hds=\frac{q_{bx0}hl_{ij}}{2}\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{Bmatrix}$$

2D KE. Trougaoni KE. Linearna interpolacija. CST KE



- **Raspodela deformacije u polju KE**

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\mathbf{Bd}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0\\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3\\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\end{Bmatrix}$$

  - S obzirom na to da su elementi matrice **B** konstantni sledi da su komponente deformacije u elementu konstantne pa se ovaj element naziva **trougaoni element sa konstantnim deformacijama ili CST element** (*C*onstant *S*train *T*riangle ***element***)

- **Raspodela napona (unutrašnjih sila) u polju KE**

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\mathbf{DBd}=\mathbf{Sd}=\frac{1}{2A}\mathbf{D}\begin{bmatrix}b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0\\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3\\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\end{Bmatrix}=h\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}$$

  - gde je $\mathbf{S=DB}$ (matrica raspodele napona KE)

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & 0\\ D_{21} & D_{22} & 0\\ 0 & 0 & D_{33}\end{bmatrix}\qquad S=\frac{1}{2\,A}\begin{pmatrix}\text{b1 D11} & \text{c1 D12} & \text{b2 D11} & \text{c2 D12} & \text{b3 D11} & \text{c3 D12}\\ \text{b1 D21} & \text{c1 D22} & \text{b2 D21} & \text{c2 D22} & \text{b3 D21} & \text{c3 D22}\\ \text{c1 D33} & \text{b1 D33} & \text{c2 D33} & \text{b2 D33} & \text{c3 D33} & \text{b3 D33}\end{pmatrix}$$

  - S obzirom na to da su elementi matrica **D** i **B** konstantni sledi da su komponente napona (unutrašnjih sila) u elementu konstantne što se zaključuje i na osnovu konstantnih deformacija

2D KE. Trougaoni KE. Linearna interpolacija. CST KE

- **Komentari**
  - Kontinuitet pomeranja na granicama između pojedinih KE je ispunjen jer linearna raspodela pomeranja duž ivica KE može jednoznačno da se odredi u zavisnosti od pomeranja odgovarajućih čvorova
  - Pomeranja čvorova susednih KE jednaka su pomeranjima čvorova mreže (u kojima su susedni elementi spojeni) pa su uslovi kompatibilnosti pomeranja duž susednih ivica dva KE ispunjeni
  - S obzirom na to da ovaj KE ispunjava uslove konformnosti (kompatibilnosti pomeranja) kao i uslove kompletnosti obezbeđeni su dovoljni uslovi za monotonu konvergenciju rešenja
  - Kontinuitet deformacije na granicama susednih KE nije obezbeđen
  - Uslovi ravnoteže zadovoljeni su u polju KE ali su naponi na granicama između susednih KE u opštem slučaju različiti, tj. uslovi ravnoteže na granicama između susednih KE u opštem slučaju nisu zadovoljeni
  - U čvorovima KE zadovoljeni su uslovi ravnoteže
  - U slučajevima nagle promene deformacije odnosno napona neophodno je primeniti KE malih dimenzija, odnosno primeniti veliki broj elemenata, tj. usitniti mrežu KE i na taj način smanjiti greške. S obzirom na to da se na ovaj način formira mreža sa velikim brojem KE ovo se može smatrati nedostatkom ovog KE

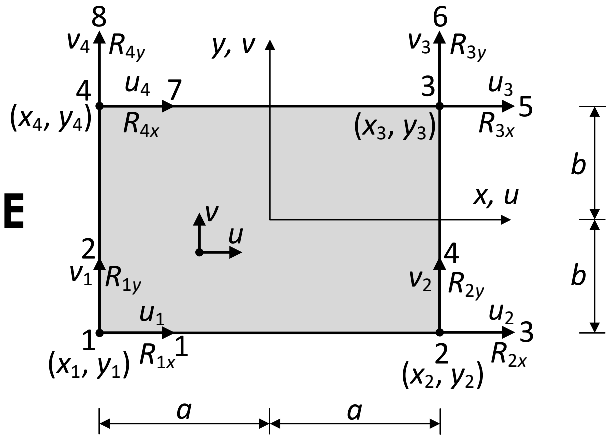
2D KE. Pravougaoni KE. Bilinearna interpolacija

- **Osnovne nepoznate**

$$\mathbf{d}^T = \{\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3 \quad \mathbf{d}_4\}$$

$$\mathbf{d}_i^T = \{u_i \quad v_i\}, \qquad i = 1,2,3,4$$

Osnovni pravougaoni KE



- **Direktan postupak za određivanje IF**
  - Usvaja se nepotpun polinom drugog stepena za raspodelu pomeranja u polju KE

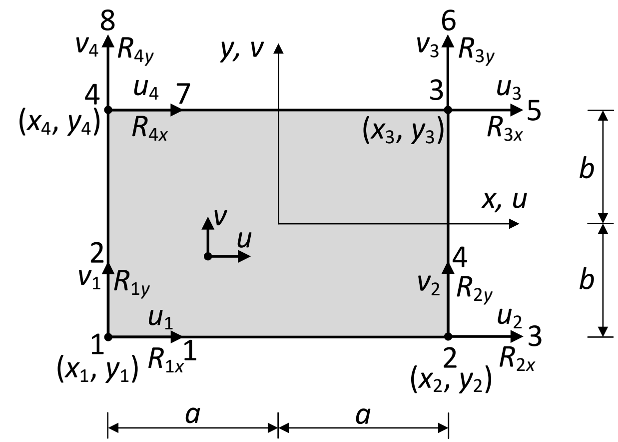
$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$
$$v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^T = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8\}$$

2D KE. Pravougaoni KE. Bilinearna interpolacija



- **Direktan postupak za određivanje IF**
  - Za čvorove KE sledi (granični uslovi)

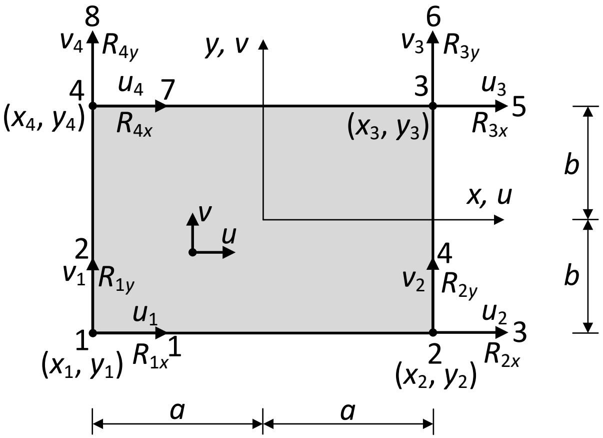
$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 x_1 y_1 = \alpha_1 - \alpha_2 a - \alpha_3 b + \alpha_4 ab$$
$$v_1 = \alpha_5 + \alpha_6 x_1 + \alpha_7 y_1 + \alpha_8 x_1 y_1 = \alpha_1 - \alpha_2 a - \alpha_3 b + \alpha_4 ab$$
$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 + \alpha_4 x_2 y_2 = \alpha_1 + \alpha_2 a - \alpha_3 b - \alpha_4 ab$$
$$v_2 = \alpha_5 + \alpha_6 x_2 + \alpha_7 y_2 + \alpha_8 x_2 y_2 = \alpha_5 + \alpha_6 a - \alpha_7 b - \alpha_8 ab$$
$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 x_3 y_3 = \alpha_1 + \alpha_2 a + \alpha_3 b + \alpha_4 ab$$
$$v_3 = \alpha_5 + \alpha_6 x_3 + \alpha_7 y_3 + \alpha_8 x_3 y_3 = \alpha_5 + \alpha_6 a + \alpha_7 b + \alpha_8 ab$$
$$u_4 = \alpha_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 y_4 + \alpha_4 x_4 y_4 = \alpha_1 - \alpha_2 a + \alpha_3 b - \alpha_4 ab$$
$$v_4 = \alpha_5 + \alpha_6 x_4 + \alpha_7 y_4 + \alpha_8 x_4 y_4 = \alpha_5 - \alpha_6 a + \alpha_7 b + \alpha_8 ab$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & 0 \\ 1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & -a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & -ab \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{4ab}\begin{bmatrix} ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 \\ -b & 0 & b & 0 & b & 0 & -b & 0 \\ -a & 0 & -a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab \\ 0 & -b & 0 & b & 0 & b & 0 & -b \\ 1 & -a & 0 & -a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & 0 \\ 1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & -a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & -ab \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

2D KE. Pravougaoni KE. Bilinearna interpolacija

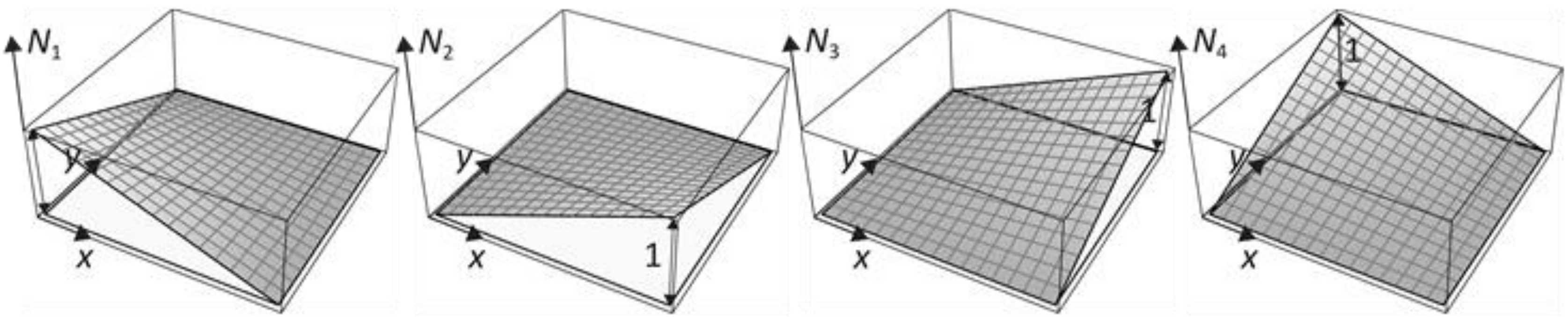


- **IF glase**

$$\mathbf{N} = \mathbf{AC}^{-1} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \qquad N_2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

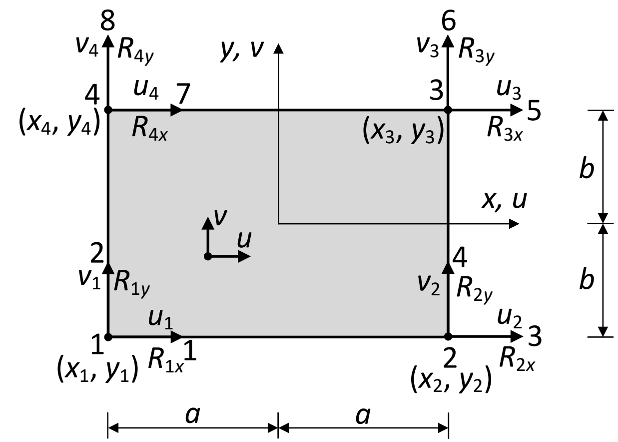
$$N_3 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) \qquad N_4 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$



- **Raspodela pomeranja u polju KE**

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nd}$$

2D KE. Pravougaoni KE. Bilinearna interpolacija



- **Matrica B**

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

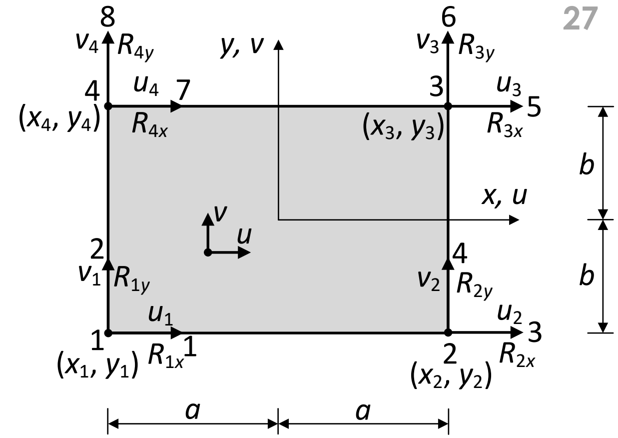
Komentar: isti oblik **B** za ravansko stanje napona i ravansko stanje deformacije

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -b+y & 0 & b-y & 0 & b+y & 0 & -b-y & 0 \\ 0 & -a+x & 0 & -a-x & 0 & a+x & 0 & a-x \\ -a+x & -b+y & -a-x & b-y & a+x & b+y & a-x & -b-y \end{bmatrix}$$

- **Matrica krutosti**

Za h=const. $\mathbf{k} = h\int_A \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dA = h\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dxdy$

2D KE. Pravougaoni KE. Bilinearna interpolacija



- **Matrica krutosti**

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{h}{12\,ab}\begin{pmatrix}
4\,(b^2\,D11 + a^2\,D33) & 3\,a\,b\,(D12 + D33) & -4\,b^2\,D11 + 2\,a^2\,D33 & 3\,a\,b\,(D12 - D33) & -2\,(b^2\,D11 + a^2\,D33) & -3\,a\,b\,(D12 + D33) & 2\,b^2\,D11 - 4\,a^2\,D33 & 3\,a\,b\,(-D12 + D33) \\
3\,a\,b\,(D21 + D33) & 4\,(a^2\,D22 + b^2\,D33) & 3\,a\,b\,(-D21 + D33) & 2\,a^2\,D22 - 4\,b^2\,D33 & -3\,a\,b\,(D21 + D33) & -2\,(a^2\,D22 + b^2\,D33) & 3\,a\,b\,(D21 - D33) & -4\,a^2\,D22 + 2\,b^2\,D33 \\
-4\,b^2\,D11 + 2\,a^2\,D33 & 3\,a\,b\,(-D12 + D33) & 4\,(b^2\,D11 + a^2\,D33) & -3\,a\,b\,(D12 + D33) & 2\,b^2\,D11 - 4\,a^2\,D33 & 3\,a\,b\,(D12 - D33) & -2\,(b^2\,D11 + a^2\,D33) & 3\,a\,b\,(D12 + D33) \\
3\,a\,b\,(D21 - D33) & 2\,a^2\,D22 - 4\,b^2\,D33 & -3\,a\,b\,(D21 + D33) & 4\,(a^2\,D22 + b^2\,D33) & 3\,a\,b\,(-D21 + D33) & -4\,a^2\,D22 + 2\,b^2\,D33 & 3\,a\,b\,(D21 + D33) & -2\,(a^2\,D22 + b^2\,D33) \\
-2\,(b^2\,D11 + a^2\,D33) & -3\,a\,b\,(D12 + D33) & 2\,b^2\,D11 - 4\,a^2\,D33 & 3\,a\,b\,(-D12 + D33) & 4\,(b^2\,D11 + a^2\,D33) & 3\,a\,b\,(D12 + D33) & -4\,b^2\,D11 + 2\,a^2\,D33 & 3\,a\,b\,(D12 - D33) \\
-3\,a\,b\,(D21 + D33) & -2\,(a^2\,D22 + b^2\,D33) & 3\,a\,b\,(D21 - D33) & -4\,a^2\,D22 + 2\,b^2\,D33 & 3\,a\,b\,(D21 + D33) & 4\,(a^2\,D22 + b^2\,D33) & 3\,a\,b\,(-D21 + D33) & 2\,a^2\,D22 - 4\,b^2\,D33 \\
2\,b^2\,D11 - 4\,a^2\,D33 & 3\,a\,b\,(D12 - D33) & -2\,(b^2\,D11 + a^2\,D33) & 3\,a\,b\,(D12 + D33) & -4\,b^2\,D11 + 2\,a^2\,D33 & 3\,a\,b\,(-D12 + D33) & 4\,(b^2\,D11 + a^2\,D33) & -3\,a\,b\,(D12 + D33) \\
3\,a\,b\,(-D21 + D33) & -4\,a^2\,D22 + 2\,b^2\,D33 & 3\,a\,b\,(D21 + D33) & -2\,(a^2\,D22 + b^2\,D33) & 3\,a\,b\,(D21 - D33) & 2\,a^2\,D22 - 4\,b^2\,D33 & -3\,a\,b\,(D21 + D33) & 4\,(a^2\,D22 + b^2\,D33)
\end{pmatrix}$$

- **Raspodela deformacije, napona i unutrašnjih sila u polju KE**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T = \mathbf{Bd}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T = \mathbf{DBd} = \mathbf{Sd}$$

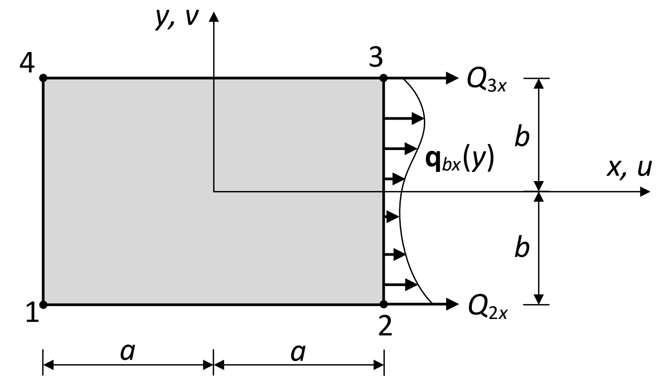
$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = h \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

  - gde je matrica $\mathbf{S=DB}$ (matrica raspodele napona KE)

$$S = \frac{1}{4\,ab}\begin{pmatrix}
D11\,(-b + y) & D12\,(-a + x) & D11\,(b - y) & -D12\,(a + x) & D11\,(b + y) & D12\,(a + x) & -D11\,(b + y) & D12\,(a - x) \\
D21\,(-b + y) & D22\,(-a + x) & D21\,(b - y) & -D22\,(a + x) & D21\,(b + y) & D22\,(a + x) & -D21\,(b + y) & D22\,(a - x) \\
D33\,(-a + x) & D33\,(-b + y) & -D33\,(a + x) & D33\,(b - y) & D33\,(a + x) & D33\,(b + y) & D33\,(a - x) & -D33\,(b + y)
\end{pmatrix}$$

2D KE. Pravougaoni KE. Bilinearna interpolacija

- **Vektor ekvivalentnog opterećenja**



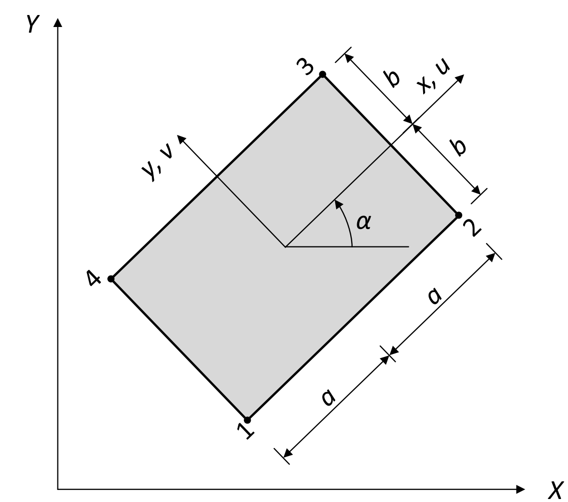
$$\mathbf{Q}=\begin{Bmatrix} Q_{1x}\\ Q_{1y}\\ Q_{2x}\\ Q_{2y}\\ Q_{3x}\\ Q_{3y}\\ Q_{4x}\\ Q_{4y}\end{Bmatrix}=\int_{-b}^{b}\mathbf{N}_S^T\mathbf{q}_b h\,dy = h\int_{-b}^{b}\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{b}\right) & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_{bx}\\ 0\end{Bmatrix}dy$$

Komentar:
Matrica interpolacionih funkcija $\mathbf{N}_S$ za ivicu između čvorova 2 i 3 KE određuje se smenom x = *a* u **N**

- **Ako je KE proizvoljno orijentisan**

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{T}_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{T}_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_4\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_i=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\qquad i=1,2,3,4$$

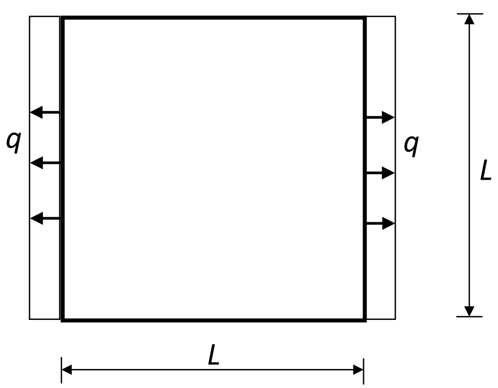


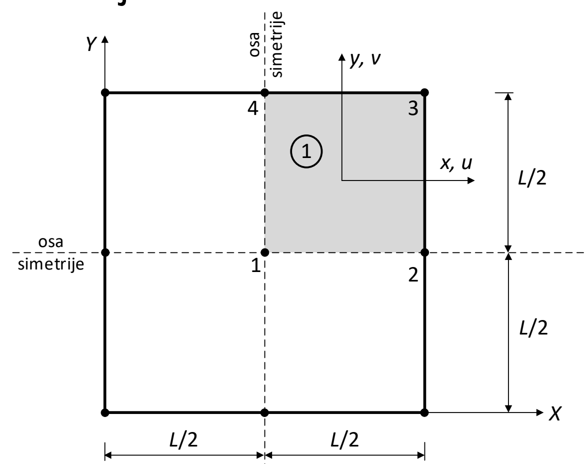
2D KE. Pravougaoni KE. Bilinearna interpolacija

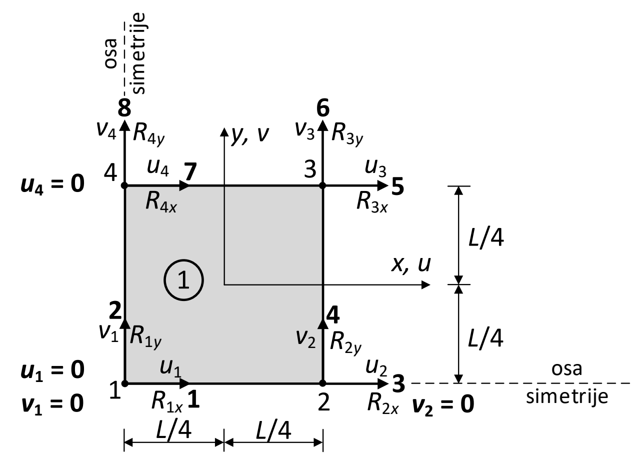
- **Komentari**
  - Kod opisanog KE obezbeđen je kontinuitet pomeranja na granicama između susednih KE
  - Dilatacija ε_x ima linearnu promenu u odnosu na y osu i konstantna je u odnosu na x osu, a za dilataciju ε_y važi suprotno
  - Klizanje γ_{xy} menja se linearno u odnosu na ose x i y
  - Jednačine ravnoteže nisu u opštem slučaju ispunjene
  - Dobro numeričko ponašanje u slučaju zatežućih ili pritiskujućih spoljašnjih opterećenja
  - U slučaju čistog savijanja KE pokazuje povećanu krutost i potreban je veliki broj KE za približavanju tačnom rešenju. Javlja se smičuća deformacija u KE a trebalo bi da bude jednaka nuli (tzv. parazitska smičuća deformacija koja koja povećava krutost KE)
  - Pravougaoni oblik može da se smatra nedostatkom ovog KE u slučaju kada je potrebno aproksimirati složeniju geometriju

2D KE. Pravougaoni KE. Bilinearna interpolacija. Primer

- **Kvadratna ploča opterećena u svojoj ravni**
  - Podaci su: q = 100 MPa, modul elastičnosti E = 200 GPa, Poasonov koeficijent ν = 0,3, debljina h = 0,01 m i dužina ivice L = 2 m



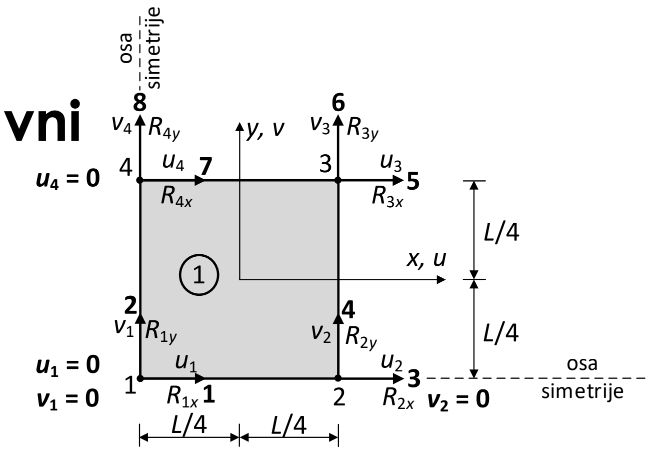




$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^* = \begin{Bmatrix} d_1^* \\ d_2^* \\ d_3^* \\ d_4^* \\ d_5^* \\ d_6^* \\ d_7^* \\ d_8^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 & 1 \\ v_1 & 2 \\ u_2 & 3 \\ v_2 & 4 \\ u_3 & 5 \\ v_3 & 6 \\ u_4 & 7 \\ v_4 & 8 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{d}_a^* = \begin{Bmatrix} u_2 & 3 \\ u_3 & 5 \\ v_3 & 6 \\ v_4 & 8 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{aa}^* \mathbf{d}_a^* = \mathbf{S}_a^* = \mathbf{P}_a^* + \mathbf{Q}_a^* \Rightarrow \mathbf{d}_a^* = \mathbf{K}_{aa}^{*-1} \mathbf{S}_a^*$$

2D KE. Pravougaoni KE. Bilinearna interpolacija. Primer

- **Kvadratna ploča opterećena u svojoj ravni**



$\mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{k}^{(1)*} = 10^5 \cdot$

1	2	3	4	5	6	7	8	
9,89011	3,57143	−6,04396	−0,27473	−4,94505	−3,57143	1,09890	0,27473	1
	9,89011	0,27473	1,09890	−3,57143	−4,94505	−0,27473	−6,04396	2
		9,89011	−3,57143	1,09890	−0,27473	−4,94505	3,57143	3
			9,89011	0,27473	−6,04396	3,57143	−4,94505	4
				9,89011	3,57143	−6,04396	−0,27473	5
		simetrično			9,89011	0,27473	1,09890	6
						9,89011	−3,57143	7
							9,89011	8

Svojstvene vrednosti matrice krutosti $\{2{,}86 \quad 1{,}54 \quad 1{,}54 \quad 0{,}99 \quad 0{,}99 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \cdot 10^6$

$\mathbf{K}_{aa}^{*} = \cdot 10^5$

3	5	6	8	
9,89011	1,09890	−0,27473	3,57143	3
	9,89011	3,57143	−0,27473	5
		9,89011	1,09890	6
sim.			9,89011	8

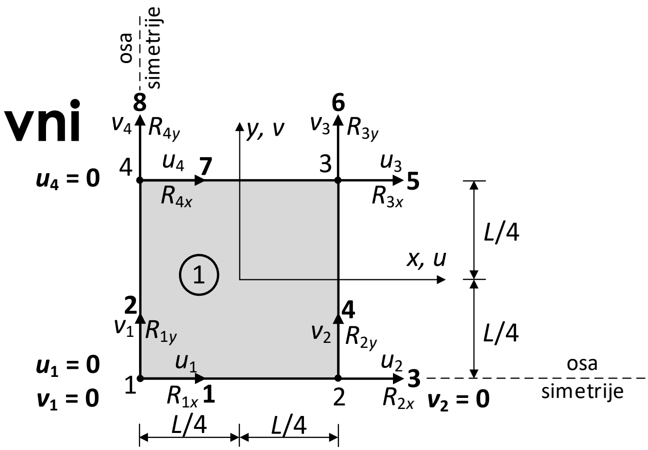
$$\mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{Q}^{(1)*} = \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \left\{ \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 500{,}0 & 0 & 500{,}0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}^T$$

$$\mathbf{Q}_a^{*} = \mathbf{S}_a^{*} = \left\{ \begin{array}{c} 500{,}0 \\ 500{,}0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{array}$$

$$\mathbf{d}_a^{*} = \mathbf{K}_{aa}^{*-1} \mathbf{S}_a^{*} = \left\{ \begin{array}{c} 50{,}0 \\ 50{,}0 \\ -15{,}0 \\ -15{,}0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{array} \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$$

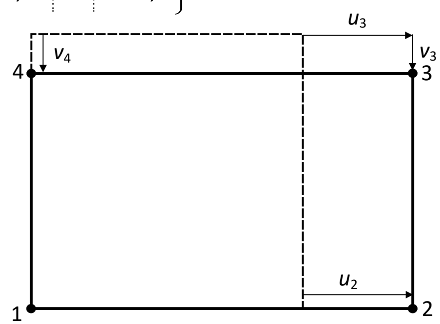
2D KE. Pravougaoni KE. Bilinearna interpolacija. Primer

- **Kvadratna ploča opterećena u svojoj ravni**



$$\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{d}^{(1)*} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{c:c:c:c:c:c:c:c} 0 & 0 & 50,0 & 0 & 50,0 & -15,0 & 0 & -15,0 \end{array} \right\}^T \end{array} \cdot 10^{-5}\,\text{m}$$

Nedeformisan (isprekidana linija) i deformisan oblik (puna linija)



$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \rightarrow \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}^{(1)} = \mathbf{N}^{(1)}\mathbf{d}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0,000250 + 0,00050x \\ -0,000075 - 0,00015y \end{Bmatrix} \text{m}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{d}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0,00050 \\ -0,00015 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\mathbf{d} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{S}^{(1)}\mathbf{d}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 100,0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{MPa} \qquad \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = h \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000,0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Komentar:
Rešenja za raspodelu pomeranja, napona i sila određena primenom MKE jednaka su tačnim rešenjima, a razlog je tačno opisivanje raspodele pomeranja u polju KE. Ako stvarna raspodela pomeranja ne bi mogla da se opiše dobilo bi se približno rešenje, a konvergencija ka tačnom rešenju može da se postigne povećanjem broja konačnih elemenata (progušćenje mreže) i/ili primenom konačnih elemenata višeg reda

Interpolacione funkcije. Lagranžovi polinomi

- **Za aproksimaciju funkcije $y(x)$ polinomom u određenom intervalu, i u određenom broju tačaka n, tako da vrednosti funkcije i polinoma budu međusobno jednake, mogu da se koriste Lagranžovi interpolacioni polinomi stepena $n-1$**
- Linearna kombinacija vrednosti funkcije y_i i Lagranžovih polinoma $L_i(x)$ glasi

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x)$$

  - gde je

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

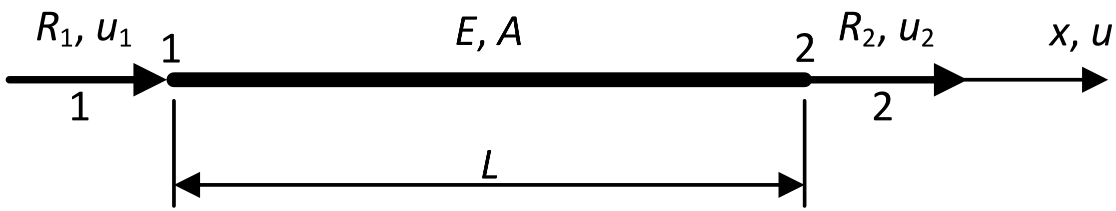
Interpolacione funkcije. Lagranžovi polinomi

- Lagranžovi polinomi imaju osobinu delta funkcije

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } \ i = j \\ 0 & \text{za } \ i \neq j \end{cases}$$

  - odnosno **za $x = x_i$ Lagranžov polinom $L_i(x_i)$ ima vrednost 1, a u svim ostalim tačkama ima vrednost jednaku 0, a to odgovara osobini interpolacionih funkcija KE**
  - **S obzirom na prethodnu osobinu, Lagranžovi interpolacioni polinomi mogu da se primene za direktno određivanje IF KE kod kojih je potrebno obezbediti kontinuitet pomeranja, pri čemu n odgovara broju čvorova, y predstavlja promenljivu u polju KE, a Lagranžovi polinomi $L_i(x)$ su IF**

Interpolacione funkcije. Lagranžovi polinomi. 1D KE. Štapni KE. Aksijalno naprezanje



$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- KE ima dva čvora, $n = 2$, pri čemu u svakom od njih postoji po jedan stepen slobode (pomeranje u pravcu ose KE)
- Koordinate početnog i krajnjeg čvora su $x_1 = 0$ i $x_2 = L$
- Lagranžovi polinomi prvog stepena (linearni polinomi) glase

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - L}{0 - L} = 1 - \frac{x}{L} = N_1(x) \qquad L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0}{L - 0} = \frac{x}{L} = N_2(x)$$

- Pomeranje $u(x)$ interpolira se funkcijom

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2} u_i L_i(x) = u_1 N_1(x) + u_2 N_2(x) = u_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + u_2 \frac{x}{L}$$

2D KE. Pravougaoni KE. Bilinearna interpolacija. Lagranžovi polinomi

- **Lagranžovi polinomi mogu da se koriste za određivanje IF pravougaonog KE množenjem pripadajućih polinoma u pravcu koordinatnih osa x i y**

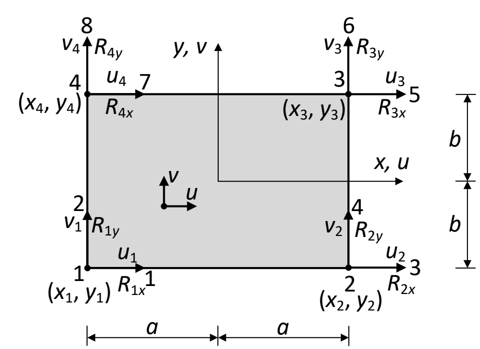
$$N_i(x,y) = L_k(x)L_l(y) \qquad L_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad L_l(y) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{m} \frac{y - y_j}{y_l - y_j}$$

  - gde su n i m broj čvorova u pravcu osa x i y, respektivno i $1 \leq k \leq n$ i $1 \leq l \leq m$

- Lagranžovi polinomi za dva čvora u pravcima x i y ose glase

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \qquad L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$L_1(y) = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \qquad L_2(y) = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

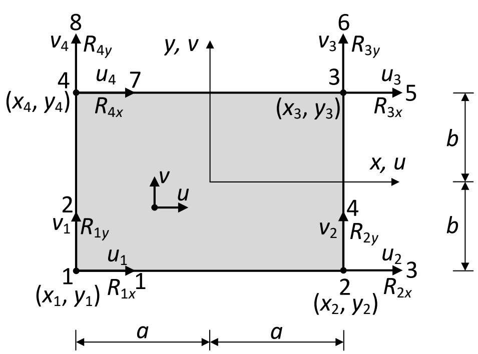


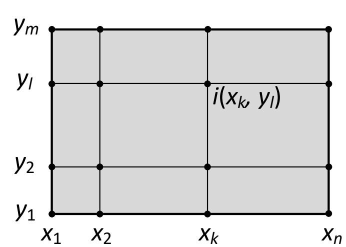
2D KE. Pravougaoni KE. Bilinearna interpolacija. Lagranžovi polinomi

- odnosno vodeći računa o koordinatama čvorova $x_1 = -a$, $x_2 = a$, $y_1 = -b$ i $y_2 = b$ sledi

$$L_1(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad L_2(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{a}\right) \quad L_1(y) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad L_2(y) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

- **IF glase**





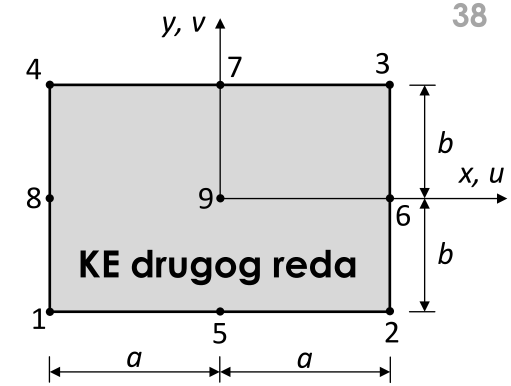
IF mogu da se odrede množenjem pripadajućih polinoma u pravcu koordinatnih osa x i y

- Čvoru 1 pridružene su koordinate sa šeme x_1 i y_1 pa se iF određuje množenjem $L_1(x)$ i $L_1(y)$
- Čvoru 2 pridružene su koordinate sa šeme x_2 i y_1 pa se iF određuje množenjem $L_2(x)$ i $L_1(y)$
- Čvoru 3 pridružene su koordinate sa šeme x_2 i y_2 pa se iF određuje množenjem $L_2(x)$ i $L_2(y)$
- Čvoru 4 pridružene su koordinate sa šeme x_1 i y_2 pa se iF određuje množenjem $L_1(x)$ i $L_2(y)$

$$N_1 = L_1(x)L_1(y) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \qquad N_2 = L_2(x)L_1(y) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$N_3 = L_2(x)L_2(y) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) \qquad N_4 = L_1(x)L_2(y) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

2D KE. Pravougaoni KE. Bikvadratna interpolacija



- **KE sa 9 čvorova i 18 stepeni slobode**
  - Lagranžovi polinomi za čvorove u pravcu osa x i y glase

$$L_k(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$L_l(y)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{m}\frac{y-y_j}{y_l-y_j}$$

$$L_1(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\frac{x-x_3}{x_1-x_3},\quad L_2(x)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\frac{x-x_3}{x_2-x_3},\quad L_3(x)=\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\frac{x-x_2}{x_3-x_2}$$

$$L_1(y)=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}\frac{y-y_3}{y_1-y_3},\quad L_2(y)=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\frac{y-y_3}{y_2-y_3},\quad L_3(y)=\frac{y-y_1}{y_3-y_1}\frac{y-y_2}{y_3-y_2}$$

  - odnosno koristeći koordinate čvorova $x_1 = -a$, $x_2 = 0$, $x_3 = a$, $y_1 = -b$, $y_2 = 0$, $y_3 = b$ sledi

$$L_1(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}\right),\quad L_2(x)=1-\frac{x^2}{a^2},\quad L_3(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}\right)$$

$$L_1(y)=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{y}{b}\right),\quad L_2(y)=1-\frac{y^2}{b^2},\quad L_3(y)=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{y}{b}\right)$$

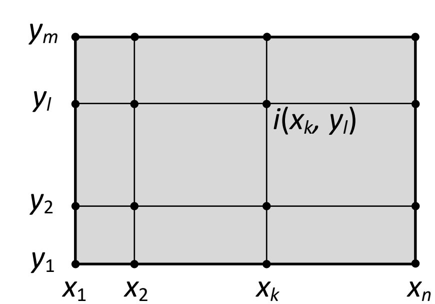
  - **IF glase**

$$N_i(x,y)=L_k(x)L_l(y)$$

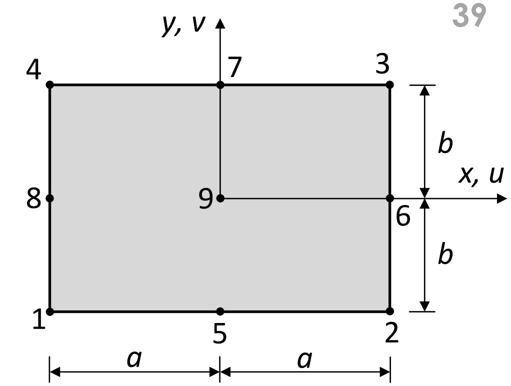
$$N_1=L_1(x)L_1(y),\quad N_2=L_3(x)L_1(y),\quad N_3=L_3(x)L_3(y),\quad N_4=L_1(x)L_3(y)$$

$$N_5=L_2(x)L_1(y),\quad N_6=L_3(x)L_2(y),\quad N_7=L_2(x)L_3(y),\quad N_8=L_1(x)L_2(y)$$

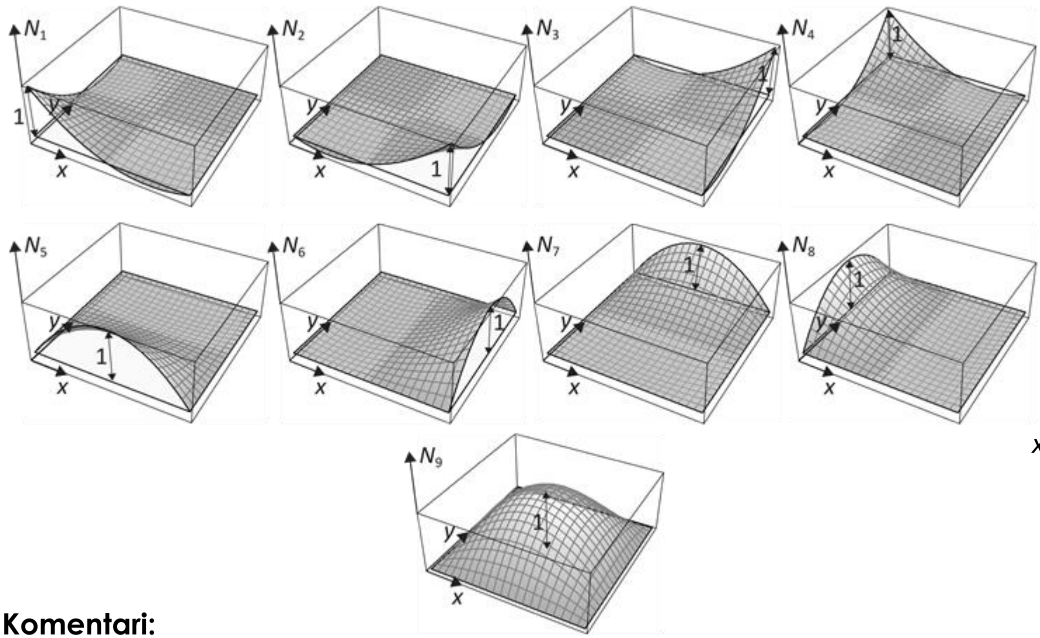
$$N_9=L_2(x)L_2(y)$$

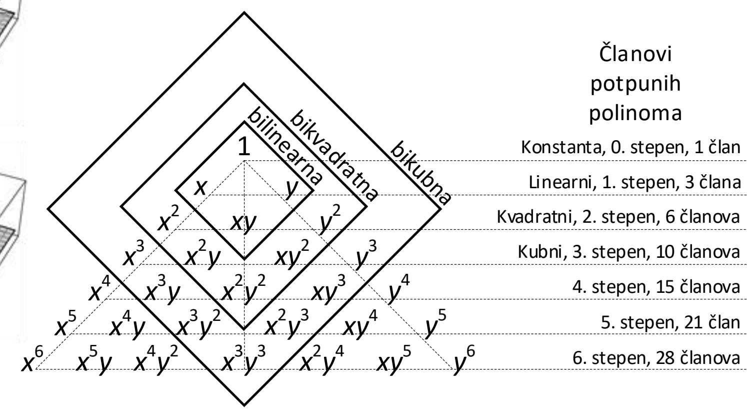


2D KE. Pravougaoni KE. Bikvadratna interpolacija



- **KE sa 9 čvorova i 18 stepeni slobode**
  - **IF**





Komentari:
- Elementi sa ovako izvedenim interpolacionim funkcijama nazivaju se u literaturi **Lagranžovi konačni elementi**
- Broj čvorova u KE je isti u pravcima koordinatnih osa x i y ali to ne mora biti slučaj, tj. moguće je množiti jednodimenzionalne Lagranžove polinome različitog stepena i na taj način izvesti IF
- Raspodela pomeranja opisana je nepotpunim polinomima, a to je jedan od nedostataka ovakvih konačnih elemenata jer je zbog toga otežana konvergencija rešenja
- Proračun matrice krutosti, raspodele pomeranja, deformacije i napona analogan je sa proračunom kod pravougaonog konačnog elementa sa bilinearnom interpolacijom